Сопряженные задачи для уравнения колебаний

Лектор: д.ф.м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

- Рассмотрим сначала одномерную задачу:
- $-\frac{d}{dx}k\frac{d\varphi}{dx} = f, 0 \in (0,1), \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$ (8.1)
- где $f \in L_2(0,1)$. Предположим сначала, что $k = k(x)$ - неизвестная функция, которую необходимо определить. Пусть имеется априорная информация, что *к(x)* – кусочно- постоянна, т.е.
- $k(x) = \begin{cases} k_1, 0 \le x \le 1/2 \\ k_2, 1/2 \le x \le 1, \end{cases}$ (8.2)

где $k_1 k_2$ - пока неизвестные числа. Предположим также, что $\varphi(x)$ - непрерывная функция, обладающая непрерывным “”потоком” $k\frac{d\varphi}{dx}$и удовлетворяющая почти всюду уравнению (8.1) и граничным условиям $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

$$J_1 = \int_0^1 p_1 \varphi dx, \quad J_2 = \int_0^1 p_2 \varphi dx, \quad (8.3)$$

p_1 и p_2 функции измерения

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi_1^*}{dx} = p_1, \quad \varphi_1^*(0) = \varphi_1^*(1) = 0, \quad (8.4)$$

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi_2^*}{dx} = p_2, \quad \varphi_2^*(0) = \varphi_2^*(1) = 0, \quad (8.5)$$

$$-\int_0^1 \varphi_1^* \frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_1^* dx. \quad (8.6)$$

$$-\int_0^1 \varphi_1^* \frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} dx = -k\varphi_1^* \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx. \quad (8.7)$$

$$\int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_1^* dx. \quad (8.8)$$

$$\int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_2^* dx. \quad (8.9)$$

$$J_1 = \int_0^1 p_1 f \varphi_1^* dx, \;\; J_2 = \int_0^1 p_2 f \varphi_2^* dx \; (8.10)$$

$$\int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = J_1, \; \int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = J_2, \; (8.11)$$

$$k_1 \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx + k_2 \quad \int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = J_1, (8.12)$$

$$k_1 \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx + k_2 \quad \int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = J_2,$$

$$\int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = a_{11}, \;\; \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = a_{21}, (8.13)$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = a_{12}, \; \int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = a_{22},$$

$$a_{11} k_1 + a_{12} k_2 = J_1, (8.14)$$

$$a_{21} k_1 + a_{22} k_2 = J_2.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$p_1(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq 1/2, \\ 0, \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad (8.15)$$

$$p_2(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1, \dfrac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$\varphi(x) = sin\pi x,$$

$$\varphi_1^*(x) = \begin{cases} -x^2 + \dfrac{5}{6}x, 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$\varphi_2^*(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}, 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ -2x^2 + \dfrac{8}{3}x - \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$J_1 = \int_0^1 p_1 \varphi dx = \int_0^{1/2} \varphi dx = \int_0^{1/2} sin\pi x dx = \frac{1}{\pi},$$

$$J_2 = \int_0^1 p_2 \varphi dx = \int_{1/2}^1 \varphi dx = \int_{1/2}^1 sin\pi x dx = \frac{1}{\pi}.$$

Вычислим $a_{ij}(i, j = 1,2)$ из (8.13)

$$a_{11} = \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = \int_0^{1/2} \pi cos\pi x \Big(-2x +$$

$$\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{6}\right)k_1+\frac{1}{3}k_2=\frac{1}{\pi},$$

$$\frac{1}{3}k_1+\left(\frac{4}{\pi}-\frac{2}{3}\right)k_2=\frac{1}{\pi},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{2}{\pi}-\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{\pi}-\frac{2}{3} \end{vmatrix}=\frac{8}{\pi^2}-\frac{2}{\pi}\neq 0;$$

$$k_1=\frac{1}{2}, k_2=1/4.$$

$$k(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, 0\leq x\leq 1/2, \\ \frac{1}{4}, 1/2< x\leq 1. \end{cases}$$

$$k(x)=\sum_{s=1}^{m}\alpha_s\omega_s(x), \quad (8.17)$$

$$-\frac{d}{dx}k\frac{d\varphi_s^*}{dx} = p_s(x), \varphi_s^*(0) = \varphi_s^*(1) = 0, s = 1,2, \dots, m,$$
(8.18)

где $p_s(x)$ - функция, связанная с измерением функционала

$$J_s = \int_0^1 p_s \varphi dx \quad (8.19)$$

$$-\int_0^1 \varphi_s^* \frac{d}{dx}k\frac{d\varphi}{dx}dx = \int_0^1 f\varphi_s^* dx. \quad (8.20)$$

$$\int_0^1 k\frac{d\varphi_s^*}{dx}\frac{d\varphi}{dx}dx = \int_0^1 f\varphi_s^* dx. \quad (8.21)$$

$$J_s = \int_0^1 f\varphi_s^* dx. \quad (8.22)$$

$$0 = \int_0^1 f\varphi_s^* dx - \int_0^1 p_s \varphi dx.$$

$\sum_{s'=1}^{m} \alpha_{s'} a_{ss'} = J_s, s = 1,2,..,m,$ (8.23)

Где

$$a_{ss'} = \int_0^1 \omega_{s'} \frac{d\varphi_s^*}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx.$$

$\sum_{s'=1}^{m} \alpha_{s'} a_{ss'} = J_s,\ s = 1,2,\dots,m, m+1, m+n,$ (8.24)

$$E = \sum_{s=1}^{m+n} \left(J_s - \sum_{s'=1}^{m} \alpha_{s'} a_{ss'} \right)^2$$

$\frac{\partial E}{\partial \alpha_l} = -2 \sum_{s=1}^{m+n} a_{sl} \left(J_s - \sum_{s'=1}^{m} \alpha_{s'} a_{ss'} \right) = 0, l = 1,2,..,m.$

$\sum_{s=1}^{m+n} a_{sl} \sum_{s'=1}^{m} a_{ss'} \alpha_{s'} = \sum_{s=1}^{m+n} s_{sl} J_s , l = 1,2,\dots,m.$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+n,1} & \cdots & a_{m+n,n} \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{bmatrix},$$

$$\beta = \begin{bmatrix} J_1 \\ \cdots \\ J_{m+n} \end{bmatrix}.$$

$$A^T A\alpha = A^T\beta,$$

$$A\varphi = f, \text{ (8.25)}$$

$$A = \sum_{s'=1}^{m} \alpha_{s'} A_{s'}, \text{ (8.26)}$$

$J_s = (p_s, \varphi)$ (8.27)

$A^* \varphi_s^* = p_s, s = 1,2, \dots, m, m+1.$ (8.28)

$(A\varphi, \varphi_s^*) - (\varphi, A^* \varphi_s^*) = (f, \varphi_s^*) - (p_s, \varphi).$ (8.29)

$$(p_s, \varphi) = (f, \varphi_s^*)$$

$J_s = (p_s, \varphi), J_s = (f, \varphi_s^*).$ (8.30)

$(A\varphi, \varphi_s^*) = (f, \varphi_s^*).$ (8.31)

$\sum_{s'=1}^{m} \alpha_{s'} a_{ss'} = J_s, s = 1,2, .., m, m+1, \dots, m+n$ (8.32)

где

$a_{ss'} = (A_{s'} \varphi, \varphi_s^*).$

Система (8.32) переопределена. Решая ее методом наименьших квадратов, получаем неизвестные α_s ($s = 1, \dots, m$). Так решается обратная задача по восстановлению коэффициентов α_s в операторе A из (8.26). Отметим, что при ее решении описанном в данном параграфе способом предполагалось, что функции φ, φ_s^* известны. Ведь именно они определяют коэффициенты $a_{ss'}$ в системе (8.32). Однако эти функции не всегда можно знать заранее. Оказывается, что в ряде случаев их можно заменить на некоторые ”невозмущенные” функции - решения модельных задач, соответствующих задачам (8.25), (8.28). Это можно сделать на основе методов теории возмущений, о чем будет подробно рассказано в дальнейшем.

Возможны и другие модификации решения обратных задач. Опыт показывает, что во всех случаях применение сопряженных уравнений является весьма эффективным при решении обратных задач.

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.